

QUELLEN UND STUDIEN  
ZUR  
GESCHICHTE DER MATHEMATIK

HERAUSGEGEBEN VON

O. NEUGEBAUER  
GÖTTINGEN

J. STENZEL  
KIEL

O. TOEPLITZ  
BONN

ABTEILUNG A:  
QUELLEN

1. BAND

MATHEMATISCHER PAPYRUS  
DES STAATLICHEN MUSEUMS DER  
SCHÖNEN KÜNSTE IN MOSKAU

HERAUSGEGEBEN UND KOMMENTIERT  
VON W. W. STRUVE

UNTER BENÜTZUNG EINER HIEROGLYPHISCHEN  
TRANSKRPTION VON B. A. TURAJEFF

MIT 15 TEXTFIGUREN UND 10 TAFELN



BERLIN  
VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1930

MATHEMATISCHER PAPYRUS  
DES STAATLICHEN MUSEUMS DER  
SCHÖNEN KÜNSTE IN MOSKAU

HERAUSGEGEBEN UND KOMMENTIERT

VON

W. W. STRUVE

UNTER BENUTZUNG EINER  
HIEROGLYPHISCHEN TRANSKRIPTION

VON

B. A. TURAJEFF

MIT 15 TEXTFIGUREN UND 10 TAFELN



BERLIN  
VERLAG VON JULIUS SPRINGER  
1930

Der  
Staatlichen Universität zu Leningrad  
in Dankbarkeit und Verehrung  
gewidmet

## Vorwort.

Der Mathematische Papyrus des Moskauer Museums der Schönen Künste (4676 des Inventars) entstammt der Sammlung von W. Golenischeff, des Gelehrten, der die Ägyptologie schon um so manchen wichtigen Text bereichert hat<sup>1)</sup>. Erworben hatte er den Papyrus in dem Jahre 1892/93 oder 1893/94 von Abd-el-Rasul, einem der Brüder, durch die der Königsmumienfund von Deir-el-Bahri gemacht worden ist. Gemäß dem Zeugnisse des Verkäufers entstammte die Rolle der Nekropolis von Dra Abu'l-Negga<sup>2)</sup>. Schon M. Cantor erwähnt in der zweiten Auflage seiner „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I“, Leipzig 1894, S. 23 unseren Papyrus. Der Text wurde 1912 zusammen mit der übrigen Sammlung von Golenischeff für das Museum der Schönen Künste in Moskau erworben. Der Konservator der ägyptologischen Abteilung des Museums, der 1920 verstorbene Akademiker B. Turajeff, wandte gleich dem interessanten Papyrus seine Aufmerksamkeit zu. Die Frucht seiner Studien war der Aufsatz „The volume of the truncated pyramid in Egyptian mathematics“ in *Ancient Egypt*, 1917, S. 100–102. In dieser Untersuchung wies Turajeff nach, daß eine Aufgabe des Papyrus (Aufg. 9 der alten = Aufg. 14 der neuen Zählung) die mathematisch genaue Formel des Pyramidenstumpfvolumens enthält. Diese Tatsache von größter kulturgeschichtlicher Tragweite feuerte ihn zur weiteren Untersuchung des schwierigen Textes an. Bei dieser Arbeit half ihm als mathematischer Ratgeber Prof. D. Tzinslerling. Zusammen mit diesem fand er die richtige Lösung der Rechtecksaufgabe (Nr. 1 bzw. Nr. 6 neuer Zählung), der beiden Dreiecksaufgaben Nr. 2 und 12 (bzw. 7 und 17) und ebenso der Mischungsaufgabe Nr. 15 (bzw. 21). Die Arbeit von Tzinslerling „Die Geometrie bei den alten Ägyptern“, die auf diesem neuen Material aufgebaut war, wurde von Turajeff 1919 der Akademie der Wissenschaften vorgelegt. Zu dieser Arbeit sollte Turajeff die Transkription und Übersetzung der genannten Aufgaben hinzufügen. Sein frühzeitiger Tod verhinderte ihn, die Abschrift aus seinem Manuskript der Transkription des M. P. selbst zu machen. Dieses Manu-

---

<sup>1)</sup> Vgl. die Worte Gardiners, J. E. A. I, S. 20: „No living Egyptologist had made greater additions to our scanty but precious store of old Egyptian literature than M. Golenischeff.

<sup>2)</sup> Über den Fundbericht s. die Angaben von W. Golenischeff bei Archibald, *Bibliography of egyptian and babylonian mathematics*, S. 98.

skript fand ich nach Turajeffs Tod unter seinen Papieren. Es umfaßt 20 Einzelblätter. Auf ihnen ist außer einer ganz kurzen Beschreibung des Papyrus die hieroglyphische Transkription von 19 der 20 Aufgaben des Hauptstückes des Papyrus gegeben. Die 15. Aufgabe des Hauptstückes fehlt im Manuskript<sup>1)</sup>. Die Aufgaben 1, 2, 9, 12 und 15 der Zahlung des Manuskripts sind mit einer Übersetzung versehen<sup>2)</sup>. Die genannte Arbeit von Tzinslerling wurde erst 1925<sup>3)</sup> gedruckt. Beigelegt wurde auf Wunsch des Autors die Turajeffsche Transkription und Übersetzung der ebengenannten Aufgaben, die Turajeff als gelöst ansah und die im Manuskript druckfertig waren. Der Arbeit von Tzinslerling verdanke ich sehr viel und ebenso den Gesprächen, die wir seinerzeit über die betreffenden Aufgaben führten. Was die Transkription von Turajeff anbetrifft, so hat sie vor kurzem in T. E. Peet und B. Gunn sehr harte Kritiker gefunden<sup>4)</sup>. Sie werfen ihr Ungenauigkeit und Unvollständigkeit vor. Ich halte dieses Urteil für durchaus ungerecht. Natürlich hat die Transkription von Turajeff ihre Fehler, aber welche Pionierarbeit hat sie nicht? Die Unvollständigkeit der Transkription ist bedingt durch die große Vorsicht Turajeffs, der jegliche Rekonstruktion sorgfältig vermied. Bei Rekonstruktionen kann auch der sorgfältigste Arbeiter die grobsten Fehler machen. Errare humanum est. 1923 erschien die grundlegende Edition des P. Rhind durch T. E. Peet<sup>5)</sup>. Dieser hatte auch die Photographien des M. P. zur Verfügung und es finden sich in seiner Edition einige sehr wertvolle Einzelbeobachtungen über unseren Text. Freilich kann ich mich nicht mit seinem Urteil über die Bedeutung des M. P. für die Geschichte der Mathematik einverstanden erklären: „though the papyrus is of highest interest owing to its early date and admirable state of preservation (in part at least) it contains nothing, with the exception of the problem of the truncated pyramid, which will greatly modify the conception of Egyptian mathematics given to us by the already published papyri and fragments“<sup>6)</sup>. Ich glaube doch, daß der M. P. auch außer dem Pyramidenstumpfproblem unsere Kenntnis um wesentlich neue und wichtige Tatsachen bereichert.

Meine intensive Arbeit an dem M. P. begann eigentlich erst 1927. Damals erhielt ich durch die Freundlichkeit der Direktion des Moskauer Museums die Photographien des ganzen Papyrus. Sie waren so gut, daß

<sup>1)</sup> Eine vorläufige Transkription dieser Aufgabe findet sich auf einem der vier Blätter, die dem Manuskript beigelegt waren. Diese Blätter enthalten mit Bleistift geschriebene Transkriptionsversuche der Aufgaben 1, 2, 3, 5 bis 15, 18 und 20 des Hauptstückes. <sup>2)</sup> Kopien dieser Übersetzungen hatte auch Tzinslerling.

<sup>3)</sup> Im Bulletin de l'Académie des Sciences de l'Union des Républiques Socialistes, 1925, S. 541–568. <sup>4)</sup> J. E. A. XV, S. 167.

<sup>5)</sup> Dieses Buch kam erst im Herbst 1927 in meine Hände durch die große Güte von Prof. Th. Whittimore. D. Tzinslerling konnte deshalb gar nicht bei seiner Arbeit die Edition von Peet heranziehen, vgl. Archibald, l. c. S. 67.

<sup>6)</sup> S. 6.

sie das Original fast ersetzen konnten. Im Sommer 1927 bekam ich dank einer Summe, die mir die Staatliche Ermitage gab, die Möglichkeit, zwei Wochen in Moskau das Original selbst zu studieren. 1927 begann auch meine Korrespondenz mit Dr. O. Neugebauer, die mir soviel Anregung gab und mir auch den Mut verlieh, mich selbständig an den mathematischen Kommentar zu wagen. Mein ursprünglicher Plan war ja, meine Arbeit nur auf die Revision der Transkription Turajeffs und die Übersetzung der nicht interpretierten Aufgaben einzuschränken und den mathematischen Kommentar dem bewährten Berater Turajeffs in mathematicis Prof. D. Tzinslerling zu überlassen. Dieser hatte aber 1927 nicht die Zeit, eine solche Arbeit auf sich zu nehmen und so entschloß ich mich, auch für den mathematischen Kommentar die Verantwortung zu tragen. Meine Arbeit war zum Herbst 1928 im wesentlichen abgeschlossen. Es verblieb die Niederschrift und die Autographie meiner Transkription. Von Dr. O. Neugebauer erhielt ich den freundlichen Vorschlag, die Edition in den „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik“ erscheinen zu lassen. Ich erhielt die Erlaubnis dazu vom Moskauer Museum der Schönen Künste und im Spätherbst 1929 begann der Druck. Hinsichtlich meiner Transkription möchte ich hier bemerken, daß ich die Abweichungen von der Transkription Turajeffs nicht verzeichnet habe. Ich trage ja allein die volle wissenschaftliche Verantwortlichkeit für jedes Detail der Transkription<sup>1)</sup>. Die vorzügliche Autographie meiner hieroglyphischen Transkription entstammt der künstlerischen Hand von J. J. Perepelkin. Der Index ist besorgt worden von Dr. N. A. Metscherski. Ihnen beiden sei mein innigster Dank ausgesprochen. Einige Untersuchungen, die erst 1930 in meine Hände gekommen sind, so vor allem der schon oben erwähnte interessante Aufsatz von Gunn und Peet „Four geometrical problems from the Moscow mathematical papyrus“ in J. E. A. XV, S. 168–185, konnte ich nur teilweise in meinen Text verarbeiten. Einiges holte ich im Glossar nach. Dort finden sich auch einige meiner zuletzt gemachten Beobachtungen. Deshalb bitte ich den Leser im Glossar s. v. „*irj*“, „*ph3*“, „*njs*“, „*ntj*“ und „*sttj*“ besonders nachzusehen<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Das Manuskript mit der Transkription von B. Turajeff übergebe ich im September des laufenden Jahres dem Archiv des Asiatischen Museums der Akademie der Wissenschaften. Dort wird die Handschrift jedem, der sich für die Pionierarbeit des zu früh verstorbenen großen Ägyptologen interessieren sollte, leicht zugänglich sein.

<sup>2)</sup> Hinsichtlich der lateinischen Transkription des Ägyptischen, die ich in der Edition anwende, muß ich für Nicht-Ägyptologen bemerken, daß die Zeichen 3 und 4 den schwachen ägyptischen Konsonanten „Aleph“ und „Ajn“ entsprechen. Diese Laute sind nur den semitischen und nicht den indo-europäischen Sprachen eigentümlich. Ich folge der Transkription A. Ermans und kann deshalb auf seine Ägyptische Grammatik<sup>4</sup> 1928 verweisen. Noch bequemer für Nicht-Spezialisten ist die Einführung in die ägyptische Schrift im II. Band, S. XII–XIII der groß angelegten Edition des Rhind Papyrus durch Chace, Manning, Bull, Archibald, Ohio 1927–29.

---

Zum Schluß verbleibt mir die angenehme Pflicht, meinen Dank denen auszusprechen, die mir geholfen hatten, meine Arbeit zu Ende zu führen. Für so manchen guten Rat bin ich verpflichtet Prof. B. Kojalowitsch und Prof. D. Tzinslerling in Leningrad und Prof. P. Tschistjakoff in Moskau. Mein Dank gebührt Prof. G. Loria, Prof. K. Sethe und Dr. K. Vogel für die Übersendung ihrer wertvollen Arbeiten, Prof. Th. Whittimore für die kostbare Gabe der Peetschen Edition des Rh. P., Prof. R. C. Archibald für die Zusendung seiner eigenen wichtigen Untersuchungen und auch derjenigen anderer Gelehrten. Vor allem aber schulde ich Dank meinem Freunde Dr. O. Neugebauer, der mir alle seine ergebnisreichen Arbeiten zukommen ließ und auch die ganze übrige Literatur, die für die Edition von Bedeutung war, zusandte. Seine Briefe waren für mich eine Quelle der größten Anregung. Sie waren voll von wertvollen Beobachtungen, die die Interpretation des Textes stark förderten. Ich habe sie alle nach Möglichkeit sorgfältig in meiner Edition vermerkt. Er hat auch, als Redakteur der Edition, in entsagungsvoller Arbeit an vielen Stellen meine mathematischen Formulierungen zurechtgestellt und auch meinen deutschen Stil geglättet. In seinem Namen danke ich auch dem Verlage J. Springer, der in großzügiger Weise die Edition des M. P. ausgestattet hat.

Dem Museum der Schönen Künste in Moskau danke ich für die Erlaubnis, einen so wichtigen Text seiner Sammlung, wie den M. P., zu edieren. Der Staatlichen Ermitage bin ich verpflichtet für die Möglichkeit, in Moskau am Originale gearbeitet zu haben. Im Japhetischen Institut durfte ich die Probleme des M. P. mit meinen Kollegen am Institut durchsprechen und seine wissenschaftliche Einstellung gab mir den Mut, schon in einem ägyptischen Papyrus des M. R. die Kenntnis eines Lehrsatzes des Archimedes vorauszusetzen und den Nachweis seiner Existenz zu versuchen. Eine innere Notwendigkeit für mich war die Widmung der Edition der Staatlichen Universität zu Leningrad. Sie hat ja stets der Ägyptologie, einer scheinbar so weltfernen Disziplin, ihren Platz im Lehrplane eingeräumt. Wenn nun diese Edition wirklich nachweisen sollte, daß die Ägyptologie über Quellen verfügt, die auch für weite wissenschaftliche Kreise Wert haben, so wird dieses Resultat dem Editor der schönste Lohn für alle seine Mühe sein.

Leningrad, den 29. Juni 1930.

W. Struve.

## Inhaltsverzeichnis.

|  | Seite |
|--|-------|
| Einleitung. Beschreibung des Papyrus . . . . .                     | 1     |
| § 1. Die Rekonstruktion des Papyrus . . . . .                      | 1     |
| § 2. Die äußere Beschreibung des rekonstruierten Papyrus . . . . . | 5     |
| § 3. Die Paläographie des Papyrus . . . . .                        | 7     |
| § 4. Die Orthographie des Papyrus . . . . .                        | 10    |
| § 5. Sprachliche Besonderheiten . . . . .                          | 12    |
| § 6. Die stereotypen Formeln der Aufgaben . . . . .                | 14    |
| § 7. Die Terminologie der 4 Spezies im M. P. . . . .               | 24    |
| § 8. Terminologie der übrigen Rechenoperationen . . . . .          | 30    |
| § 9. Konstruktion der Resultatangaben . . . . .                    | 33    |
| § 10. Rechen- und Lesefehler . . . . .                             | 35    |
| § 11. Kurze Inhaltsangabe des Papyrus . . . . .                    | 36    |
| § 12. Charakteristik des Papyrus . . . . .                         | 38    |
| Übersetzung und Kommentar . . . . .                                | 41    |
| § 1. Schiffsteil-Aufgaben . . . . .                                | 41    |
| A. Aufgabe Nr. 2 Kol. II . . . . .                                 | 42    |
| B. Aufgabe Nr. 3 Kol. III . . . . .                                | 43    |
| § 2. <i>Pšw</i> -Aufgaben . . . . .                                | 44    |
| I. Die elementaren <i>pšw</i> -Aufgaben . . . . .                  | 55    |
| A. Aufgabe Nr. 15. Kol. XXX . . . . .                              | 55    |
| B. Aufgabe Nr. 24. Kol. XLIII–XLIV . . . . .                       | 57    |
| II. Die <i>bš3-bnr</i> -Aufgaben . . . . .                         | 59    |
| A. Aufgabe Nr. 9. Kol. XII–XVII . . . . .                          | 73    |
| B. Aufgabe Nr. 13. Kol. XXIV, 4–XXVI . . . . .                     | 77    |
| C. Aufgabe Nr. 22. Kol. XL–XLI . . . . .                           | 78    |
| III. Die <i>'pr</i> -Aufgaben . . . . .                            | 79    |
| A. Aufgabe Nr. 8. Kol. X–XI . . . . .                              | 81    |
| B. Aufgabe Nr. 5. Kol. VI–VII . . . . .                            | 82    |
| C. Aufgabe Nr. 16. Kol. XXXI–XXXII . . . . .                       | 83    |
| IV. Die <i>bš3 mj bnr</i> -Aufgabe . . . . .                       | 90    |
| Aufgabe Nr. 12 Kol. XXIII–XXIV, 3 . . . . .                        | 92    |
| V. Die <i>bd .t</i> -Aufgabe . . . . .                             | 93    |
| Aufgabe Nr. 20 Kol. XXXVII . . . . .                               | 95    |
| § 3. Die <i>šbn</i> -Aufgabe . . . . .                             | 98    |
| Aufgabe Nr. 21 Kol. XXXVIII–XXXIX . . . . .                        | 98    |
| § 4. Die <i>bšk .w</i> -Aufgaben . . . . .                         | 101   |
| A. Aufgabe Nr. 11. Kol. XXI–XXII . . . . .                         | 101   |
| B. Aufgabe Nr. 23. Kol. XLII . . . . .                             | 106   |



|   | Seite |
|---|-------|
| § 5. Die 'h'-Aufgaben . . . . .   | 110   |
| A. Aufgabe Nr. 25. Kol. XLV . . . . .   | 112   |
| B. Aufgabe Nr. 19. Kol. XXXVI . . . . .   | 114   |
| C. Aufgabe Nr. 1. Kol. I . . . . .  | 115   |
| § 6. Die <i>sttjw</i> -Aufgabe . . . . .  | 117   |
| Aufgabe Nr. 18 Kol. XXXV . . . . .  | 120   |
| § 7. Die <i>idb</i> -Aufgaben . . . . .   | 123   |
| A. Aufgabe Nr. 6. Kol. VIII . . . . .   | 125   |
| B. Aufgabe Nr. 17. Kol. XXXIII–XXXIV . . . . .  | 128   |
| C. Aufgabe Nr. 7. Kol. IX . . . . .   | 133   |
| § 8. Die Pyramidenstumpf-Volumen-Aufgabe . . . . .  | 134   |
| Aufgabe Nr. 14 Kol. XXVII–XXIX . . . . .  | 137   |
| § 9. Die <i>3h.t</i> -Aufgaben . . . . .  | 145   |
| A. Aufgabe Nr. 4. Kol. IV–V . . . . .   | 146   |
| B. Aufgabe Nr. 10. Kol. XVIII–XX . . . . .  | 157   |
| Ergebnisse . . . . .  | 170   |
| § 1. Die Anfänge der wissenschaftlichen Betrachtungsweise in der ägyptischen Mathematik . . . . . | 170   |
| § 2. Die Genauigkeit der Terminologie . . . . .   | 172   |
| § 3. Die Entdeckung des Lehrsatzes vom Inhalt des quadratischen Pyramidenstumpfes . . . . .       | 174   |
| § 4. Die Entdeckung des Lehrsatzes von der Kugel-Oberfläche . . . . .                             | 176   |
| § 5. Das Verhältnis zur babylonischen und griechischen Mathematik . . . . .                       | 181   |
| § 6. Die ägyptische Wissenschaft . . . . .  | 184   |
| Glossar . . . . .   | 187   |
| Namen- und Sachregister . . . . .   | 194   |
| Korrigenda zur hieroglyphischen Transkription . . . . .   | 198   |
| Tafeln I–X.   |       |

## Konkordanz

| M  | Kol.           | S.  | M  | Kol.          | S.  |
|----|----------------|-----|----|---------------|-----|
| 1  | I              | 115 | 14 | XXVII–XXIX    | 135 |
| 2  | II             | 42  | 15 | XXX           | 55  |
| 3  | III            | 43  | 16 | XXXI, XXXII   | 84  |
| 4  | IV, V          | 146 | 17 | XXXIII, XXXIV | 128 |
| 5  | VI, VII        | 82  | 18 | XXXV          | 120 |
| 6  | VIII           | 125 | 19 | XXXVI         | 114 |
| 7  | IX             | 133 | 20 | XXXVII        | 95  |
| 8  | X, XI          | 81  | 21 | XXXVIII–XXXIX | 98  |
| 9  | XII–XVII       | 73  | 22 | XL, XLI       | 78  |
| 10 | XVIII–XX       | 157 | 23 | XLII          | 106 |
| 11 | XXI, XXII      | 101 | 24 | XLIII, XLIV   | 57  |
| 12 | XXIII, XXIV, 3 | 92  | 25 | XLV           | 112 |
| 13 | XXIV, 4–XXVI   | 77  |    |               |     |